"УТВЕРЖДАЮ"
Ректор Белгородского государственного
национального исследовательского
университета профессор О.Н. Полухин

5 декабря 2014 г.

# ОТЗЫВ

ведущей организации на диссертационную работу
Струковой Ирины Игоревны
"Гармонический анализ периодических на бесконечности функций",
представленную на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук по специальности
01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

В диссертационной работе введён в рассмотрение новый класс функций, названных периодическими на бесконечности, и исследованы его свойства. Необходимость в изучении этих новых функций мотивируется их естественным появлением как решений широкого класса разностных и дифференциальных уравнений. При этом возникла потребность в создании аналога рядов Фурье такого класса функций, получения условий их сходимости, оценок сходимости, получении аналогов классических результатов теории периодических функций для периодических на бесконечности функций, в частности, доказательство аналога теоремы Винера об абсолютно сходящихся рядах Фурье и описание спектра банаховой алгебры периодических на бесконечности функций.

Диссертация состоит из введения и пяти глав.

Во введении приводится ряд известных понятий и результатов из абстрактного гармонического анализа, которые систематически используются при получении основных результатов диссертации.

Во второй главе вводится базовое понятие периодической на бесконечности функции и крайне важное понятие ряда Фурье периодических на бесконечности функций, даются определения классического и обобщённого рядов Фурье. В отличие от рядов Фурье классических периодических функций коэффициентами Фурье периодических на бесконечности функций являются не числа, а медленно меняющиеся на бесконечности функции. Хотя и не установлена теорема о единственности разложения в ряд Фурье, но есть свойство о единственности разложения на бесконечности. Основные результаты главы содержатся в пяти теоремах. Приведем наиболее важные из них.

Теорема 2.6. Пусть $X$ – банахова алгебра с единицей. Если функция $a \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{J}, X)$ обратима относительно подпространства $C_0(\mathbb{J}, X)$ и имеет абсолютно сходящийся ряд Фурье, то любая обратная к ней относительно подпространства $C_0(\mathbb{J}, X)$ функция имеет абсолютно сходящийся ряд Фурье.

Теорема 2.7. Для того, чтобы функция $x \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{J}, X)$ была представима в виде $x = x_1 + x_0$, где $x_1 \in C_\omega(\mathbb{J}, X)$, $x_0 \in C_0(\mathbb{J}, X)$, необходимо и достаточно, чтобы в $C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ существовал $\lim\limits_{N\to\infty} A_N x$.

В третьей главе получены условия периодичности на бесконечности решений рассматриваемых уравнений с генератором сильно непрерывной полугруппы. Основные результаты содержатся в следующих теоремах.

Теорема 3.2. Пусть спектр оператора $B$ удовлетворяет условию $\sigma(B) \bigcap \mathbb{T} \subset \{1\}$. Тогда каждое равномерно непрерывное решение разностного уравнения

$$x(t+1) = Bx(t) + y_0, \quad t \in \mathbb{J}, \ \mathbb{J} \in \{\mathbb{R}_+, \mathbb{R}\}, \ B \in EndX, \ y_0 \in C_0(\mathbb{J}, X),$$

является периодической на бесконечности функцией периода 1.

Теорема 3.3. Пусть имеет место включение $\sigma(U(1)) \cap \mathbb{T} \subset \{1\}$. Тогда каждое ограниченное на $\mathbb{J}$ слабое решение уравнения

$$\dot{x}(t) - Ax(t) = y(t)$$

является периодической на бесконечности функцией периода 1, т.е. $x \in C_{1,\infty}(\mathbb{J}, X)$.

Теорема 3.4. Пусть полугруппа операторов $U : \mathbb{R}_+ \to EndX$ ограничена и для спектра ее генератора $A$ выполнено включение

$$\sigma(A) \cap i\mathbb{R} \subset \left\{ i\frac{2\pi n}{\omega}\mathbb{Z}, \ n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Тогда все функции $\varphi_x : \mathbb{R}_+ \to X$ вида $\varphi_x(t) = U(t)x, t \geq 0$, являются периодическими на бесконечности функциями периода 1.

В четвертой главе изучаются алгебры $C_{sl,\infty}(\mathbb{R}_+, \mathbb{K})$ и $C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}_+, \mathbb{K})$, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, медленно меняющихся и периодических на бесконечности функций соответственно. На этих алгебрах в качестве изометрического представления выбрана стандартная полугруппа сдвигов. Относительно этого представления рассматриваются банаховы пределы, с помощью которых исследуются спектры алгебр медленно меняющихся и периодических на бесконечности функций. Основные результаты содержатся в следующих теоремах.

Теорема 4.4. Спектр алгебры $C_{sl,\infty}(\mathbb{R}_+, \mathbb{K})$ представим в виде $\mathcal{BL}(C_{sl,\infty}(\mathbb{R}_+, \mathbb{K})) \bigcup \{\xi_\tau;\ \tau \geq 0\}$.

Теорема 4.6. Спектр алгебры $C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$ совпадает с множеством

$$M = \{T_{\xi_0,\gamma_0};\ \gamma_0 \in \mathbb{T}, \xi_0 \in \mathcal{BL}(C_{sl,\infty}(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}))\} \bigcup \{\xi_\tau;\ \tau \geq 0\}.$$

В пятой главе даётся определение периодических на бесконечности функций, заданных на $\mathbb{R}^N$ и принимающих значения в банаховом пространстве. Для этих функций получены результаты, аналогичные соответствующим результатам из второй главы.

Диссертация написана современным и чётким языком. Основные результаты диссертации являются новыми и строго обоснованы методами абстрактного гармонического анализа, теории представлений алгебр и групп, спектральной теории операторов. Доказательства утверждений являются полными и достоверными. Результаты диссертации, без сомнения, будут использованы специалистами в области теории функций и дифференциальных уравнений.

Основные результаты своевременно опубликованы, причём четыре статьи опубликованы в журналах из перечня ВАК. Отметим широкую апробацию результатов диссертации, которые излагались на ряде международных конференций. Автореферат полно и правильно отражает содержание диссертации. Результаты диссертации могут быть использованы при исследованиях по гармоническому анализу в Московском государственном университете, Саратовском государственном университете, Южном федеральном университете, Воронежском государственном университете, Белгородском государственном национальном исследовательском университете, Новосибирском государственном национальном исследовательском университете, Башкирском государственном университете и др.

Отметим ряд пожеланий, которые носят рекомендательный характер.

1. Интересно развитие теории периодических на бесконечности функций, определённых на локально компактной абелевой группе. Это позволило бы расширить приложения развиваемой теории.

2. Важным было бы понятие дробной производной от периодических на бесконечности функций с возможными приложениями к дифференциальным уравнениям с дробной производной.

Суммируя изложенное, считаем, что диссертационная работа Ирины Игоревны Струковой "Гармонический анализ периодических на бесконечности функций"является законченной научно-квалификационной работой, содержащей решение задач, имеющих существенное значение для функционального анализа. Работа И.И. Струковой удовлетворяет всем требованиям п. 9 "Положения о порядке присуждения ученых степеней", утвержденного Постановлением Правительства РФ, которые предъявляются к диссертациям на соискание ученой степени кондидата наук. Автор, Струкова Ирина Игоревна, несомненно, заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Отзыв обсужден на заседании кафедры математики Белгородского государственного национального исследовательского университета 19 ноября 2014 года, протокол № 5.

Зав. кафедрой математики,
кандидат физ.-мат. наук, доцент — И.П. Борисовский

доктор физ.-мат. наук,
профессор — А.В. Глушак

Подписи заверяю